

坡顶局部荷载下边坡的二维和三维稳定分析 (II) ——极限分析的上限法

杨雪强¹, 区兆光², 郑榕明³, 冯颖匡⁴, 李彰明¹

(1 广东工业大学 建设学院, 广东 广州 510006; 2 香港大学 土木工程系, 香港;

3 香港理工大学 土木与结构工程系, 香港; 4 香港城市大学 建筑系, 香港)

摘要: 在上限理论的框架内, 借助提出的三维破坏模式, 探讨了坡顶均布矩形超载下边坡的安全系数随荷载长宽比的变化规律, 相应的安全系数计算结果与 FLAC 有限元的计算结果进行了有益的对比, 也与室内模型实验结果进行了对比, 从而对上限解法求解三维边值问题的可靠性进行了较深入的论证. 对同一边坡的二维和三维稳定问题, 上限法和 FLAC 有限元法尽管破坏机制和数值处理过程不同, 但均可得出大致相同的安全系数, 基本实现了殊途同归. 上限法和有限元法都是有效的土坡稳定分析方法, 两者相辅相成, 互为验证.

关键词: 土坡; 上限解; 三维破坏模式; 有限元法; 安全系数

中图分类号: O32

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2009) 01-0001-08

在边坡稳定分析领域, 二维稳定分析方法仍是主要手段. 但是自然界发生的滑坡具有显著的三维效应, 在工程设计中应该使用三维稳定分析方法为宜, 如洞口开挖边坡、坡顶有局部超载或者有建筑荷载、边界有约束的坝体稳定和废弃物的稳定等等. 三维稳定分析得出的安全系数通常要大于二维稳定分析得出的安全系数^[1], 三维稳定分析可以更加真实地反映边坡的稳定状况.

目前应用于边坡稳定分析的方法主要有极限分析法、极限平衡法和有限元法. 有限元法在这篇论文的姊妹篇中给予了论述^[2], 这里不重复. 极限分析理论的上限法也是评价边坡稳定的常用方法, 近年来发展起来的不同处理方法^[3-7] 均对三维边坡的稳定进行了有益的探讨, 拓展了人们的思路.

正如传统的边坡稳定分析方法, 土体的安全系数 F_s 被定义为

$$c_e = c/F_s, \quad (1)$$

$$\tan\phi_e = \tan\phi/F_s. \quad (2)$$

式中 c 和 ϕ 是土体的内聚力和内摩擦角. 式 (1) 和 (2) 定义安全系数的方法与 FLAC 强度折减有限元法的相同, 便于研究结果间相互比较.

本文在上限理论的框架内^[8], 通过对文献 [9] 提出的方法进行了较大的改进, 较为系统深入地探讨了坡顶有均布矩形超载下边坡的稳定性, 并分别

与 FLAC 强度折减有限元法的计算结果和边坡的实验结果进行对比, 从而对上限解法求解二维和三维边坡稳定问题的可靠性进行了较为深入的论证.

1 极限分析理论

极限分析理论提供了求解一些边值问题极限荷载的有效途径. 它假定: 1) 土体是均质各向同性的弹塑性体; 2) 土体遵循 Mohr-Coulomb 屈服破坏准则; 3) 土体服从相关流动法则, 表达为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = l \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad l \geq 0 \quad (3)$$

式中 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 分别是应力与应变增量张量, $f(\sigma_{ij})$ 是 M-C 屈服破坏准则的数学表达式. l 是非负的标量函数. 根据极限分析理论, 通过构建运动相容的失稳机制, 令内力消散功率等于外力所做功率可求出边值问题的极限荷载. 通常能量平衡方程被表达为

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dV + \int_A [v]_i t_i dA = \int_S t_i v_i dS + \int_V \gamma_i v_i dV, \quad (4)$$

式中的第 1 项表示在体积 V 内 σ_{ij} 与 ϵ_{ij} 间产生的消散功率, 第 2 项表示在速度不连续面 A 上的牵引力 t_i 与速度矢量差 $[v]_i$ 产生的消散功率, 第 3 项表示在边界面 S 上由外力 t_i 沿速度 v_i 方向所作的外力功率, 第 4 项表示在体积 V 内重度 γ_i 沿速度 v_i 方向所作的外力功率.

假定一个破坏机制, 土体的破坏区域被划分为

收稿日期: 2007-11-19

作者简介: 杨雪强 (1966-), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为岩土类材料的强度与本构关系、边坡稳定与挡土结构土压力等.

一系列小的可平移的刚体区域, 这些相邻小刚体区域的接触面称为速度不连续面. 在这些小的刚体区域内 $\dot{\varepsilon}_j = 0$ 因此式 (4) 被简化为

$$\int_A [v]_i dA = \int_S v_i dS + \int_V v_i dV. \quad (5)$$

需要指出的是上述的破坏机制并非一定是实际发生的破坏机制. 通过构建不同的破坏机制并进行计算, 于是最优的上界外部荷载可被优化求出, 且该值不小于实际工程中导致的外部破坏荷载. 另一方面, 应用极限分析的下界理论, 即通过构造一个静态相容的应力场, 该应力场满足受力的边界条件和每一点的静力平衡方程, 且不违背土体的屈服方程, 也就是说该静态相容的应力场要么处于极限平衡状态要么处于极限平衡状态之下. 所以极限分析的下界理论提供了一个求解边值问题下限荷载的可能性.

如果边值问题的上、下限荷载已被求出, 那么边值问题真实的破坏荷载将处于上、下限荷载之间. 极限分析理论的这种特点提供了求解三维边坡稳定问题极限荷载的有效途径. 对一般的三维边值问题, 构造一个静态相容的应力场通常是很困难的, 但构造一个与工程经验相联系的速度相容的破坏机制却是可行的. 基于此, 本文从极限分析的上限理论途径来探讨坡顶局部荷载下边坡的二维和三维稳定安全系数.

2 边坡的三维破坏机制

在坡顶存在均布矩形荷载的情况下, 设 L 和 B 分别是均布矩形荷载的长度与宽度, L 和 B 分别是沿着边坡的走向和垂直于边坡的走向, b 为荷载边缘到坡顶边缘的水平距离, 从上限角度构造的速度相容的失稳机制如图 1 (a)、(b) 和 (c) 所示, 图 1 (d) 给出了土体三维滑动破坏的范围. 经比较看出, 图 1 (d) 给出的土体三维滑动破坏范围与文献 [2] 中图 2 所示的有限元计算出的三维土体破坏范围相一致; 也与近期香港理工大学室内模型实验揭示出的边坡三维破坏模式相一致, 见本文 4.3 部分.

2.1 沿荷载长度 L 方向产生的功率

基于图 1 (b) 所示, 内聚力 c 沿着速度不连续面 $ac \cdot L$ 产生的抵抗功率为

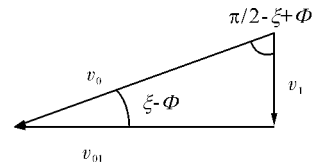
$$\dot{W}_{R1} = c \cdot ac \cdot L \cdot v_0 \cos \phi, \quad (6)$$

式中 $ac = r_0 = B / (2 \cos \phi)$.

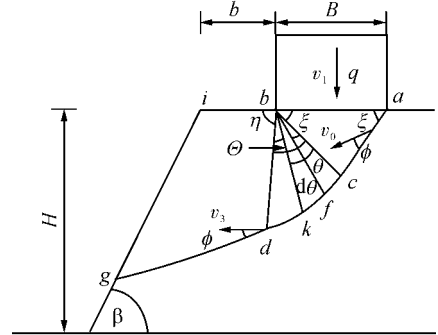
在径向剪切区域 bad 范围内产生的抵抗功率为

$$\dot{W}_{R2} = \alpha_0 r_0 L \frac{\exp(2\Theta \tan \phi) - 1}{\tan \phi}. \quad (7)$$

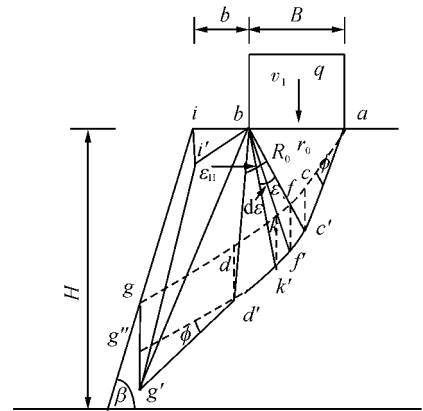
内聚力 c 沿着速度不连续面 $dg \cdot L$ 产生的抵抗



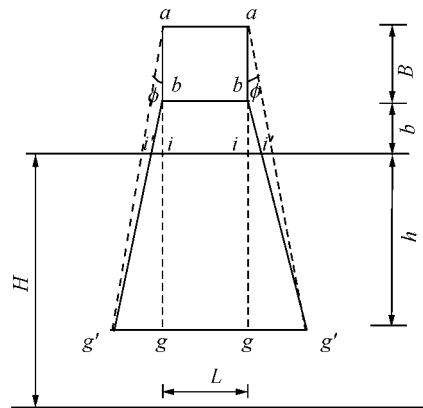
(a) 速度矢量图



(b) 沿荷载长度的主破裂面



(c) 荷载两端的端部破裂面



(d) 土体的滑动破坏范围

图 1 坡顶存在均布矩形荷载下边坡的三维滑动破坏机制功率为

$$\dot{W}_{R3} = c \cdot dg \cdot L \cdot v_3 \cos \phi, \quad (8)$$

式中 $v_3 = v_0 \exp(\Theta \tan \phi)$, $bd = r_0 \exp(\Theta \tan \phi)$.

正如图 1 (b) 所示, 设 b 点的坐标为 $x_b = 0$, $y_b = 0$, $z_b = 0$ 于是 i 点的坐标为 $x_i = b$, $y_i = 0$, $z_i = 0$; d 点的坐标为 $x_d = bd \cdot \cos \eta$, $y_d = 0$, $z_d = bd \cdot \sin \eta$; g 点的坐

标为 $x_g = ?$, $y_g = 0$ $z_g = ?$. 为了求出 x_g 和 z_g , 两个几何方程被建立如下:

$$\frac{z_g - z_d}{x_g - x_d} = \tan(\phi + \eta - 90^\circ), \frac{z_g - z_i}{x_g - x_i} = \tan\beta.$$

(9)

x_g 和 z_g 由式 (9) 求出如下:

$$x_g = \frac{b \tan\beta + z_d - x_d \tan(\phi + \eta - 90^\circ)}{\tan\beta - \tan(\phi + \eta - 90^\circ)},$$

$$z_g = (x_g - b) \tan\beta$$

(10)

且式 (8) 中的 d_g 被表达为

$$d_g = \sqrt{(x_g - x_d)^2 + (z_g - z_d)^2}.$$

(11)

同时另一方面, 坡顶面压力 q 产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{D1} = qBLv_1.$$

(12)

楔体 abc 的重量产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{D2} = W_{abc}v_0 \sin(\xi - \phi),$$

(13)

式中 $W_{abc} = (\gamma \cdot ac \cdot B \cdot L \sin\xi) / 2$

径向剪切区域 bcd 的重量产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{D3} = \frac{\gamma}{2} \int_0^{\Theta} r^2 L v \cos(\theta + \xi) d\theta =$$

$$\frac{\gamma}{2} r_0^2 L v_0 \left\{ \exp(3\Theta \tan\phi) [\sin(\Theta + \xi) + 3 \tan\phi \cos(\Theta + \xi)] - \sin\xi - 3 \tan\phi \cos\xi \right\} / (1 + 9 \tan^2\phi).$$

(14)

楔体 $bdgi$ 的重量产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{D4} = W_{bdgi} \cdot v_3 \cos(180^\circ - \eta),$$

(15)

式中 $W_{bagi} = \gamma L (S_{big} + S_{bdg})$, $S_{bdg} = (bd \cdot dg \cos\phi) / 2$

和 $S_{big} = (bi \cdot gi \sin\beta) / 2$ 相应的 $bi = b$ 和 $gi = \sqrt{(x_g - x_i)^2 + (z_g - z_i)^2}$.

2 2 坡顶荷载的两个端部破裂面产生的功率

2 2 1 端部破裂部分 1

如图 1(c) 所示, cc' 是水平线且垂直于平面 abc 为了保证端部破裂部分 1 的滑动速度等于 v_0 , ac 与 ac' 之间的夹角应等于 ϕ 值, 因此 $cc' = r_0 \tan\phi$, $r_0 = ac$. 速度不连续面 acc' 产生的抵抗功率被表达为

$$\dot{W}_{RE1} = c \cdot S_{acc'} \cdot v_0 \cos\phi,$$

(16)

式中 $S_{acc'} = ac \cdot cc' / 2$

楔体 $abc-c'$ 的重量产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{DE1} = W_{abc-c'} \cdot v_0 \sin(\xi - \phi).$$

(17)

其中 $ab = B$, $S_{abc} = (ab \cdot ac \sin\xi) / 2$ $W_{abc-c'} = \gamma \cdot S_{abc} \cdot cc' / 3$

2 2 2 端部破裂部分 2

如图 1(c) 所示, $b-odd'$ 是一个三维的径向剪

切破裂部分 2 如果假设 $c'd'$ 是一个对数螺旋线且该对数螺旋线的旋转中心为 b 点, 于是 $R = R_0 \times \exp(\varepsilon \tan\phi)$ 成立且 $R_0 = bc'$ 和 $R = bf'$. 对三角形 bff' , 速度 v 垂直于 bf 和 bf' 这两条线, 所以可推出速度 v 垂直于三角形 bff' , 进而垂直该面内的线 ff' . 为了保证端部破裂部分 2 滑动的相容性, 在微单元 $b-fkk'f'$ 内, 要保证速度 $v = v_0 \exp(\theta \tan\phi)$ 与 $f'k'$ 线间的水平角等于 ϕ . 需要指出曲面 $cc'd'd$ 与平面 abc 相垂直, 且 $R d\varepsilon$ 与 $rd\theta$ 之间有如下的关系

$$rd\theta / \cos\phi = R d\varepsilon$$

(18)

式中 $r = r_0 \exp(\theta \tan\phi)$, $R = R_0 \exp(\varepsilon \tan\phi)$, 且 $r_0 = R_0 \cos\phi$.

在式 (18) 的两边进行积分得出

$$\theta = \xi \ominus = \varepsilon_{\eta},$$

(19)

其中 $\ominus$ 是 bc 与 bd 之间的夹角, ε_{η} 是 bc' 与 bd' 之间的夹角.

1) 速度不连续曲面 $bc'd'$

速度不连续平面 $bf'k'$ 的面积被表达为

$$S_{bf'k'} = \frac{1}{2} R^2 \sin d\varepsilon = \frac{1}{2} R^2 d\varepsilon$$

(20)

于是由内聚力 c 沿速度不连续平面 $bc'd'$ 产生的抵抗功率通过积分求出如下:

$$\dot{W}_{RE2} = \int c \cdot S_{bf'k'} \cdot v \cos\phi = \frac{1}{2} c v_0 R_0^2 \cos\phi \int_0^{\Theta} \exp(3\theta \tan\phi) d\theta$$

$$= \frac{\cos\phi}{6 \tan\phi} c v_0 R_0^2 [\exp(3\Theta \tan\phi) - 1].$$

(21)

2) 速度不连续曲面 $cc'd'd$

ff' 与 bf 相垂直, 所以 ff' 被表达为

$$ff' = (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} = r_0 \tan\phi \exp(\theta \tan\phi).$$

(22)

微单元 $ff'k'k$ 的面积为

$$S_{ff'k'k} = ff' \cdot R d\varepsilon = r_0 R_0 \tan\phi \exp(2\theta \tan\phi) d\theta.$$

(23)

因此在速度不连续曲面 $cc'd'd$ 上产生的抵抗功率为

$$\dot{W}_{RE3} = \int_0^{\Theta} S_{ff'k'k} \cdot v \cdot \cos\phi = \frac{1}{3} r_0^2 v_0 c [\exp(3\Theta \tan\phi) - 1].$$

(24)

3) 径向剪切破坏区域 $b-cc'd'd$

三角形 bff' 的面积为

$$S_{bff'} = \frac{1}{2} df \cdot ff' = \frac{1}{2} r_0^2 \tan\phi \exp(2\theta \tan\phi),$$

(25)

式中 $bf = r_0 \exp(\theta \tan\phi)$.

在该径向剪切破坏区域 $b-cc'd'd$ 内产生的消散功率可通过积分获得

$$\dot{W}_{RE4} = \int_0^{\Theta} \int_{ff'} c \cdot v d\theta = \frac{1}{2} r_0^2 c v_0 \tan\phi \int_0^{\Theta} \exp(3\Theta \tan\phi) d\theta = \frac{1}{6} r_0^2 c v_0 [\exp(3\Theta \tan\phi) - 1]. \quad (26)$$

4) 径向剪切破坏区域 $b-cc'd'd$ 的重量 ($0 \leq \theta \leq \Theta$)

微单元 $b-ff'kk'$ 的重被表达为

$$W_{b-ff'kk'} = \frac{\gamma}{3} S_{ff'kk'} \cdot l_f \cos\phi = \frac{\gamma}{3} r_0^2 R_0 \sin\phi \exp(3\Theta \tan\phi) d\theta \quad (27)$$

于是由该区域 $b-cc'd'd$ 的重量产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{DE2} = \int_0^{\Theta} W_{b-ff'kk'} \cdot v \cos(\xi + \theta) = \frac{\gamma}{3} r_0^2 R_0 v_0 \sin\phi \left\{ \exp(4\Theta \tan\phi) [\sin(\Theta + \xi) + 4 \tan\phi \cos(\Theta + \xi)] - \sin\xi - 4 \tan\phi \cos\xi \right\} / (1 + 16 \tan^2\phi). \quad (28)$$

2.2.3 端部破裂部分 3

如图 1(c)所示, dg 与 $d'g''$ 相平行, 为了保证端部破裂部分 3 滑动的相容性, 直线 $d'g'$ 与 $d'g''$ 间的夹角应等于 ϕ . 需要明确的是直线 $gg''g'$ 和 ii' 均位于边坡坡面内; ii' 也同时位于边坡坡顶平面内, 三角形 bii' 位于坡顶平面内; 两个三角形 $bd'g'$ 和 $bg'i'$ 均位于同一速度不连续平面 $bd'g'i'b$ 内.

1) 速度不连续平面 $dd'g'g$

速度不连续平面 $dd'g'g$ 的面积为

$$S_{dd'g'g} = dd' \cdot dg + (dg \cdot dg \cdot \tan\phi) / 2, \quad (29)$$

式中 $dd' = r_0 \tan\phi \exp(\Theta \tan\phi)$.

内聚力 c 沿着该速度不连续平面产生的抵抗功率为

$$\dot{W}_{RE5} = c \cdot S_{dd'g'g} \cdot v_3 \cos\phi. \quad (30)$$

2) 速度不连续平面 $bd'g'i'b$

如图 1(c)所示, d' 点的坐标为 $x_{d'} = x_b$, $y_{d'} = dd'$, $z_{d'} = z_b$; g' 点的坐标为 $x_{g'} = x_g$, $y_{g'} = dd' + dg \cdot \tan\phi$, $z_{g'} = z_g$; i' 点的坐标为 $x_{i'} = x_b$, $y_{i'} = ?$, $z_{i'} = z_b$. 于是由 3 个点 b , d' 和 g' 构成的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_b & y - y_b & z - z_b \\ x_{d'} - x_b & y_{d'} - y_b & z_{d'} - z_b \\ x_{g'} - x_b & y_{g'} - y_b & z_{g'} - z_b \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

i' 点应该位于该平面内, 所以在式 (31) 中将 x , y , z 替换为 $x_{i'}$, $y_{i'}$, $z_{i'}$, 于是有

$$y_{i'} = b \frac{z_{i'} \cdot y_{g'} - y_{d'} \cdot z_{g'}}{z_{i'} \cdot x_{g'} - x_{d'} \cdot z_{g'}} \quad (32)$$

相应的 $bd'g'$ 的面积被表达为

$$S_{bd'g'} = \frac{1}{4} [(bd' + d'g' + bg')(bd' + d'g' - bg')(bd' - d'g' + bg')(-bd' + d'g' + bg')]^{1/2}, \quad (33)$$

其中 $bd' = R_0 \exp(\Theta \tan\phi)$, $d'g' = dg / \cos\phi$ 和 $bg' = \sqrt{(x_b - x_{g'})^2 + (y_b - y_{g'})^2 + (z_b - z_{g'})^2}$. $bg'i'$ 的面积被表达为

$$S_{bg'i'} = \frac{1}{4} [(bg' + bi' + g'i')(bg' + bi' - g'i')(bg' - bi' + g'i')(-bg' + bi' + g'i')]^{1/2}, \quad (34)$$

其中 $g'i' = \sqrt{(x_{i'} - x_{g'})^2 + (y_{i'} - y_{g'})^2 + (z_{i'} - z_{g'})^2}$ 和 $bi' = \sqrt{b^2 + y_{i'}^2}$.

于是内聚力 c 沿着速度不连续平面 $bd'g'i'b$ 产生的抵抗功率为

$$\dot{W}_{RE6} = c \cdot (S_{bd'g'} + S_{bg'i'}) \cdot v_3 \cos\phi. \quad (35)$$

3) 楔体 $b-dd'g'g$

楔体 $b-dd'g'g$ 的重为

$$W_{b-dd'g'g} = (\gamma \cdot S_{dd'g'g} \cdot bd \cos\phi) / 3 \quad (36)$$

该楔体重产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{DE3} = W_{b-dd'g'g} \cdot v_3 \cos(180^\circ - \eta). \quad (37)$$

4) 楔体 $b-gg'i'i$

楔体 $b-gg'i'i$ 的重为

$$W_{b-gg'i'i} = (\gamma \cdot S_{gg'i'i} \cdot b \sin\beta) / 3 \quad (38)$$

其中 $S_{gg'i'i} = gi \cdot (y_{i'} + y_{g'}) / 2$ 和 $gi = \sqrt{(x_g - x_{i'})^2 + (z_g - z_{i'})^2}$.

该楔体重产生的驱动功率为

$$\dot{W}_{DE4} = W_{b-gg'i'i} \cdot v_3 \cos(180^\circ - \eta). \quad (39)$$

3 边坡稳定安全系数的确定

对图 1 所示的破坏机制, 总的抵抗功率被表达为

$$\dot{W}_R = \dot{W}_{R1} + \dot{W}_{R2} + \dot{W}_{R3} + 2(\dot{W}_{RE1} + \dot{W}_{RE2} + \dot{W}_{RE3} + \dot{W}_{RE4} + \dot{W}_{RE5} + \dot{W}_{RE6}). \quad (40)$$

总的驱动功率被表达为

$$\dot{W}_D = \dot{W}_{D1} + \dot{W}_{D2} + \dot{W}_{D3} + 2(\dot{W}_{DE1} + \dot{W}_{DE2} + \dot{W}_{DE3} + \dot{W}_{DE4}). \quad (41)$$

利用式 (1) 和 (2) 的定义, 试算不同的 F_s 值直到式 (42) 被满足为止:

$$\dot{W}_R - \dot{W}_D = f_1(\xi, \eta) = 0 \quad (42)$$

于是相应的 F_s 值被称为图 1 边坡三维稳定的安全系数, 与该值 F_s 相对应的 ξ 和 η 称为欲失稳边坡的临界破裂角.

4 验证

4.1 二维边坡的验证

参考图 1(b), 当 $b = 0$ 时, 基于 Sokolovski (1954) 的滑移线方程, 无重边坡坡顶极限压力 q_u 的表达式为

$$q_u = c \cdot N_c \tag{43}$$
$$N_c = c \cdot \cot \phi \left\{ \tan^2 \left[45^\circ + \frac{\phi}{2} \right] \exp[(p - 2B) \tan \phi] - 1 \right\} \tag{44}$$

对无重介质的二维平面问题, 不同的坡角由式 (42) 算出的 N_c 与由式 (44) 算出的 N_c 分别表示在图 2 中. 图 2 的结果对比表明式 (42) 算出的 N_c 值稍小于由式 (44) 算出的 N_c 值, 这从二维方面论证了本文提出的三维破坏机制的合理性.

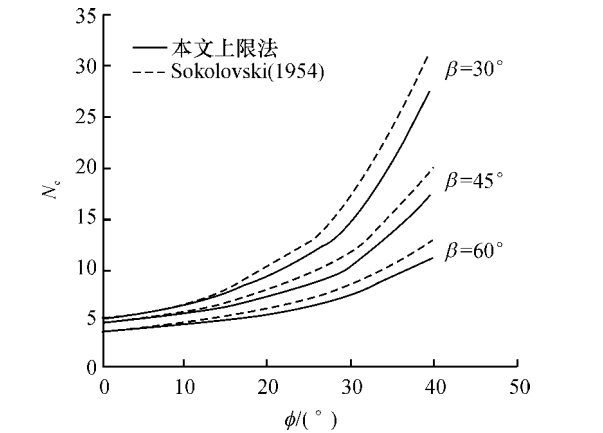


图 2 Sokolovski 与本文上限法算出的 N_c 值之间的对比

4.2 三维边坡的验证

如图 1 所示, 采用文献 [3] 中的算例, 边坡的 $c = 20 \text{ kN/m}^2$, $\phi = 20^\circ$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $H = 10 \text{ m}$; 荷载的宽 $B = 1.25 \text{ m}$. 本文给出的 $q_u/c - L/B$ 关系曲线与 Michalowski [3] 给出的 $q_u/c - L/B$ 关系曲线之间的对比表示在图 3 中.

图 3 表明由本文给出的坡顶极限压力稍小于 Michalowski 给出的坡顶极限压力, 从上限理论的三维角度说明了本文提出的三维破坏机制较 Michalowski 提出的合理, 能给出更加合理的坡顶极限压力预测值.

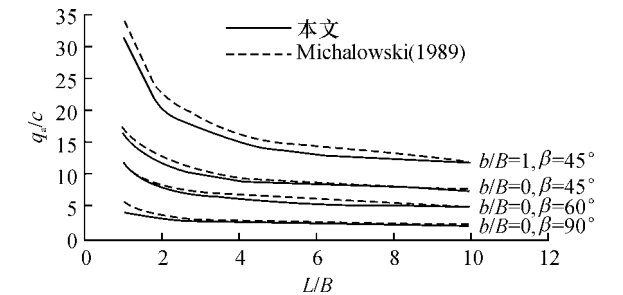


图 3 Michalowski 与本文的三维上限解之间的对比

4.3 室内实验验证

与坡顶局部超载下的理论研究相呼应, 坡顶局部超载下较大型的室内模型实验在香港理工大学由郑榕明和 Weiw B 完成, 如图 4 和 5 所示. 实验槽的长、宽、高分别为 1.85 m 、 1.5 m 、 1.2 m , 土坡高 0.8 m , 坡角为 65° ; 边坡土体的 $c = 7 \text{ kN/m}^2$, $\phi = 35^\circ$, $\gamma = 15.75 \text{ kN/m}^3$. 坡顶局部超载依靠 10 mm 厚的钢板通过千斤顶施加, 钢板的长 $L = 0.644 \text{ m}$, 宽 $B = 0.3 \text{ m}$ ($L/B = 2.15$), 钢板离坡顶边缘的距离 $b = 0.13 \text{ m}$. 当坡顶的局部荷载达到 35 kN (或钢板底面的局部压力为 $q = 181.2 \text{ kPa}$) 时, 边坡三维失稳. 当 $q = 181.2 \text{ kPa}$ 时, 由式 (42) 算出的安全系数 $F_s = 1.021$, 非常接近实验的边坡三维失稳时的安全系数 1.0 . 由式 (42) 预测出的边坡破坏迹线与实际土体破坏迹线的对比如图 5(b) 所示, 两者吻合良好. 明显看出, 图 1(d) 土坡上限理论给出的三维破坏轮廓与图 5(a) 室内实验的三维破坏轮廓是相似的.

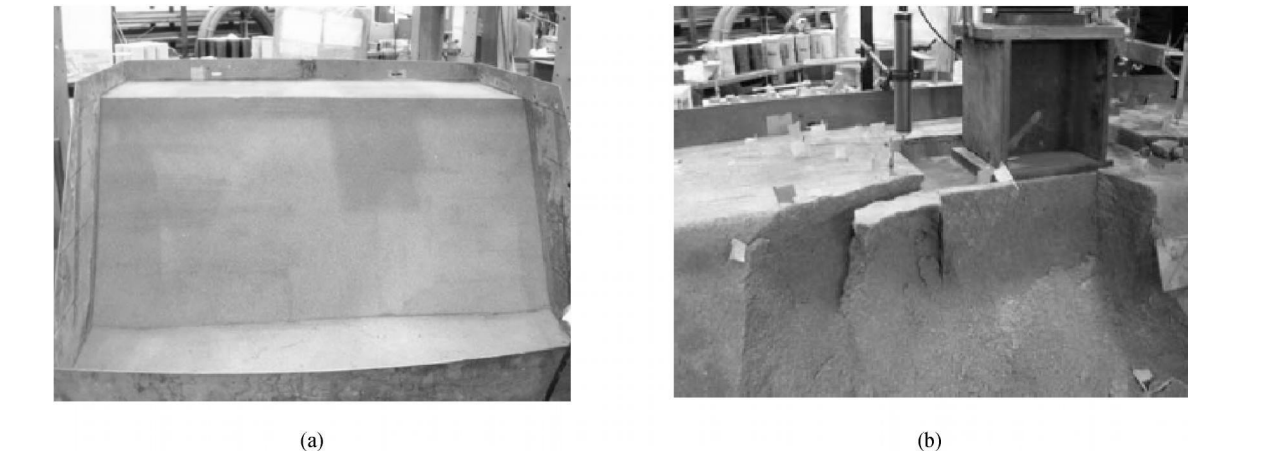


图 4 坡顶局部超载下的室内模型实验

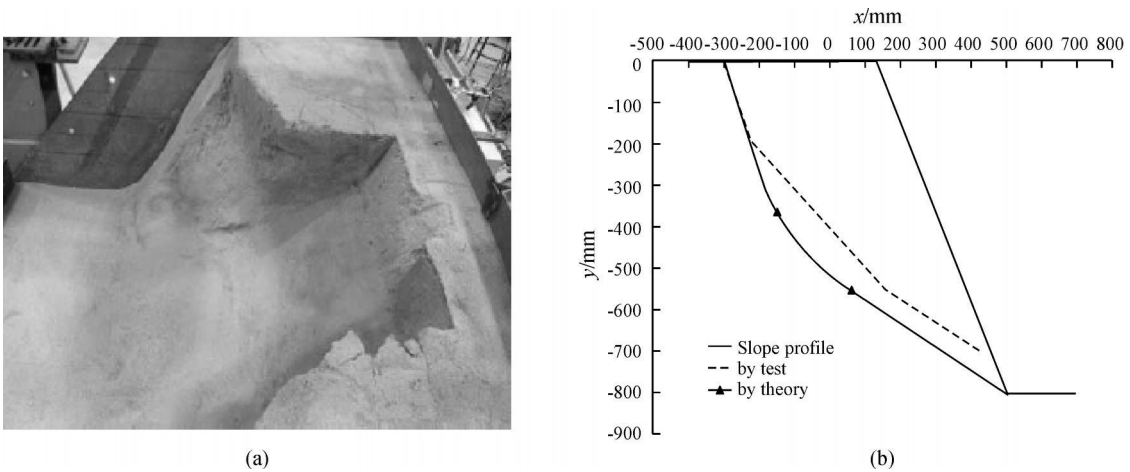


图 5 坡顶局部超载下的边坡破坏迹线

5 算例研究

如图 1 所示, 采用文献 [2] 中的算例, 以便计算结果间相互验证. 如边坡土体的 $c = 20 \text{ kN/m}^2$, $\phi = 20^\circ$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$; 坡顶均布矩形超载 $q = 100 \text{ kPa}$, 其 $B = 2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$; 边坡的 $H = 6.0 \text{ m}$ 和 $\beta = 45^\circ$. 求均布矩形超载不同的长宽比 $L/B = 1, 1.5, 2, 4, 6, 8$

10 时边坡的安全系数 F_s 值.

5.1 算例的初步计算结果

对该算例, 基于式 (42), 表 1 列出了边坡安全系数 F_s 随 L/B 变化的发展趋势, FLAC 有限元强度折减法和 Bishop 传统极限平衡方法算出的安全系数也在表 1 中列出.

表 1 F_s 随 L/B 的变化趋势

q /kPa	L/B	ξ_{cr} /($^\circ$)	η_{cr} /($^\circ$)	h /m	cc' /m	gg' /m	u' /m	F_s		
								本文上限解法	FLAC 有限元的 强度折减法 ($\phi = 0^\circ$)	Bishop 传统极限 平衡方法
100.00	∞	68.25	94.75	6.00	0.88	3.51	0.21	1.122 0	1.190 0	1.144
100.00	10	67.25	97.75	6.00	0.74	3.08	0.18	1.280 0	1.260 0	
100.00	8	67.25	98.25	6.00	0.72	3.01	0.17	1.314 0	1.300 0	
100.00	6	66.75	99.25	6.00	0.67	2.88	0.16	1.370 0	1.330 0	
100.00	4	64.25	97.75	4.97	0.57	2.30	0.16	1.469 0	1.410 0	
100.00	2	60.50	95.00	3.72	0.43	1.57	0.15	1.709 0 (1.606 1) ¹⁾	1.600 0	
100.00	1.5	58.75	93.75	3.30	0.38	1.32	0.15	1.844 4 (1.732 2) ¹⁾	1.655 0	
100.00	1	56.75	92.00	2.83	0.32	1.05	0.14	2.084 0 (1.958 8) ¹⁾	1.710 0	

1) 当 $L/B \leq 2$ 时, 表中括号内的数值为参数调整后边坡安全系数 F_s .

表 1 表明, 随着坡顶均布荷载 L/B 的减小, 边坡的安全系数逐渐增大, 且土体的三维滑动破坏逐步向着浅层发展. 这些定量计算结果与人们的工程实践经验相一致, 这也论证了本文从上限角度提出的边坡三维破坏机制的合理性.

5.2 与有限元强度折减法计算结果的对比及参数调整后的计算结果

表 1 给出的 FLAC 法算出来的安全系数要比 Bishop 法算出的要偏大一些, 主要原因是简化 Bishop 法没有考虑土体的应力与应变关系, 该基于

Mohr-Coulomb 屈服准则的传统极限平衡法简化了边坡土体结构, 从而导致计算的安全系数偏低一些. 这里, 均基于 Mohr-Coulomb 屈服准则, 简化 Bishop 法和 FLAC 法的计算结果提供了一个合理的参考基准, 用于评判本文上限方法计算结果的合理性.

极限分析上限法是基于土体遵循 M-C 屈服破坏准则并服从相关联流动法则而发展起来的. 当 $L/B > 2$ 时, 上限法用 c 和 ϕ 求出边坡的安全系数与 FLAC 法求出边坡的安全系数基本相一致. 当 $L/B \leq 2$ 时, 上限法用 c 和 ϕ 求出的安全系数明显大于

FLAC有限元法求出的安全系数. 表 1中 FLAC法求出边坡的安全系数是依据土体的剪胀角 $\psi = 0$ 算出的, 文献[2]有限元计算表明: 当 $L/B > 2$ 时, 土体不同的剪胀角对边坡稳定的安全系数影响较小, 安全系数间的差值最大不超过 0.04 但当 $L/B \leq 2$ 时, 由于存在着较大的三维空间夹制作用, 不同的剪胀角对边坡稳定的安全系数影响较大, 安全系数间的差值最大已超过 0.1 因此为与 FLAC法求出边坡的安全系数相一致起见, 对上限法 $L/B \leq 2$ 时的情况, 选取土体的剪胀角 $\psi = 0$ 进行参数修正计算.

Drescher和 Detoumay 基于土体非相关联共轴的流动法则, 结合土体的剪胀角对土体的参数提出了如下调整^[10]:

$$t = \sigma_n \tan \phi^* + c^*, \tag{45}$$

$$\tan \phi^* = \eta_b \tan \phi, \tag{46}$$

$$c^* = \eta_b c, \tag{47}$$

$$\eta_b = \frac{\cos \psi \cos \phi}{1 - \sin \psi \sin \phi} \tag{48}$$

将土体的参数由 c 和 ϕ 调整到 c^* 和 ϕ^* 后, 再由上限理论用 c^* 和 ϕ^* 参数求边坡的边值问题^[10]. Michalowski应用式(45)~(48)较成功地研究了地基的 N_y 值问题^[11].

将 $\psi = 0$, $c = 20 \text{ kN/m}^2$ 和 $\phi = 20^\circ$ 代入式(46)~(48)中求出 $c^* = 18.7939 \text{ kPa}$ 和 $\phi^* = 18.8817^\circ$, 然后基于式(42)求出边坡的安全系数值. 表 1括号内的数值给出了参数调整后边坡安全系数 F_s 随坡顶荷载 L/B 的变化趋势, 可看出当 $L/B \leq 2$ 时, 参数调整后求出的边坡安全系数得到了进一步的改善, 除 $L/B = 1$ 外, 其它情况与表 1中 FLAC有限元法求出的边坡安全系数基本相一致. 当 $L/B = 1$ 时, 图 1所示的三维破坏模式给出了稍高的安全系数预估, 比 FLAC法的安全系数 1.71高出 0.25 这说明对 $L/B = 1$ 的情况需要构造更精细的三维破坏模式. 文献[2]中图 2所示的有限元计算结果也说明了这一点, 即当 $L/B = 1$ 时的三维土体破坏模式与 $L/B > 1$ 时的三维土体破坏模式有所不同. 尽管如此, 本文图 1所示的三维破坏模式反映了 $L/B = 1$ 时边坡土体破坏的主要特征, 抓住了主要矛盾仍可对 $L/B = 1$ 时的三维稳定进行近似的评述.

6 结论

1) 本文在上限法理论的框架内, 借助本文提出的三维破坏模式, 进一步探讨了坡顶均布矩形超载

下边坡的安全系数随超载 L/B 的变化规律. 对应的安全系数计算结果也与 FLAC有限元的计算结果进行了有益的对比, 论证了上限解法求解二维和三维边坡稳定问题的可靠性.

2) 当 $L/B > 2$ 时, 对坡顶局部荷载下边坡的三维稳定分析表明, 极限分析上限法求出的边坡安全系数与 FLAC有限元法求出的边坡安全系数基本相一致; 当 $L/B \leq 2$ 时, 极限分析上限法求出的边坡安全系数比 FLAC有限元法求出的边坡安全系数稍大一些, 但仍可对三维边坡稳定进行近似的评述. 当 $L/B > 2$ 时, 图 1所示的土坡理论上的三维破坏模式与图 5(a)室内实验揭示的三维破坏模式是一致的, 也与文献[2]中图 2有限元算出的三维破坏轮廓相一致.

3) 当 $L/B \leq 2$ 时, 文献[2]的有限元计算结果表明, 由于存在着较大的三维空间夹制作用, 不同的剪胀角对边坡稳定的安全系数影响较大, 安全系数间的差值最大已超过 0.1 这可能是上限法求出的边坡安全系数比 FLAC有限元法求出的边坡安全系数稍大一些的原因. 对 $L/B \leq 2$ 时的情况, 选取土体的合理剪胀角进行参数修正明显改善了上限法求出的边坡安全系数值.

4) 对同一边坡的三维稳定问题, 上限法和 FLAC有限元法尽管破坏机制和数值处理过程不同, 但均可得出大致相同的安全系数, 基本实现了殊途同归. 上限法破坏模式直观、计算简捷, 几秒间可给出计算结果和土体的破坏范围; FLAC有限元法稍显复杂, 耗时多, 但计算给出的涉及边坡稳定的信息量大, 诸如边坡的安全系数、滑动面、位移、应力与应变关系等都可及时显示出来. 本文研究表明上限法和有限元法都是行之有效的土坡稳定分析方法, 两者相辅相成, 互为验证.

参考文献:

[1] Duncan J.M. State of the art Limit equilibrium and finite element analysis of slopes [J]. Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 1996, 122(7): 577-689.

[2] 杨雪强, 凌平平, 杨锐, 等. 坡顶局部荷载下边坡的二维和三维稳定分析(I)——强度折减的有限元法 [J]. 广东工业大学学报, 2008, 25(4): 86-93

[3] Michalowski R.L. Three dimensional analysis of locally loaded slopes[J]. Geotechnique, 1989, 39(1): 27-38

[4] Chen Z.Y, Wang X, Haberfeld C, et al. 2001. A three dimensional slope stability analysis method using the upper

- bound theorem, Part 1: Theory and methods[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences
- [5] Chen Z Y, Wang J, Wang Y, et al A three dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem, Part 2: Numerical approaches, applications and extensions[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 2001
- [6] Fazaneh O, Askari F. Three dimensional analysis of nonhomogeneous slopes[J]. J Geotech Geoenviron Eng 2003, 129 (2): 137-145
- [7] 王红雨, 杨敏. 临近基坑矩形浅基础地基承载力上限估计[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(10): 1116-1122
- [8] Chen W F. Limit analysis and Soil plasticity[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975
- [9] 杨雪强, Stolle D E F, 郭培军, 等. 坡顶压力下边坡的二维与三维稳定分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(5): 639-649
- [10] Drescher A, Detoumay E. Limit load in translational failure mechanisms for associated and non-associated materials[J]. Geotechnique 1993, 43(3): 443-456
- [11] Michalowski R. An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis[J]. Soils and Foundations 1997, 37(4): 57-64

Two and Three-dimensional Stability Analyses of

Slopes with Local Load on Top Surface(II)

— Using Upper-bound Method of Limit Analysis

Yang Xue-qiang¹, Au S K², Cheng Y M³, Fung W H⁴, Li Zhang-ming¹

(1. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006; 2 Hong Kong University, Hong Kong

3. Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong; 4 City University of Hong Kong, Hong Kong)

Abstract Combining kinematically admissible three-dimensional slope failure mechanism based on the upper-bound theory of limit analysis, slope safety factor with different ratio of length to width of uniform rectangle pressure acted on slope top surface is studied systematically, and is compared thoroughly with the safety factors calculated by using FLAC software, and further with model test results. Corresponding reliability of the upper-bound solutions to the three-dimensional slope stability is further discussed and verified. For the same three-dimensional slope stability problem, it is demonstrated that the same safety factor could be approached approximately by upper-bound theory and finite element method separately in spite of different failure mechanisms and calculation processes adopted by them. The results show that upper-bound theory and finite element method are both effective tools for evaluating three-dimensional slope stability.

Key words soil slope; upper-bound solution; three-dimensional failure mechanism; finite element method; safety factor